$$\Rightarrow \ln^2\alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{\alpha.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right)$$

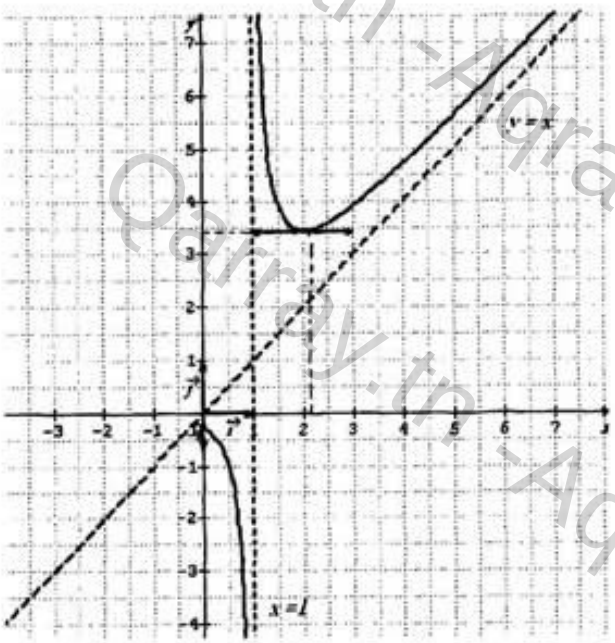
$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}\,.$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x + 1}{\ln x} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{\ln x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$\Rightarrow D: y = x$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

g) Courbe C



C Admet une demi-tangente verticale
Au point d'abscisse 0 dirigé vers le bas.

$f(\alpha) \approx 2{,}1 + \sqrt{2{,}1} \approx 3{,}5$

Exercice 13

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

1) $Df = \left\{x \in \mathbb{R}^*_+ , 1 - \ln x \geq 0\right\}$.

On a : $1 - \ln x \geq 0$ et $x > 0$.

$\Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$.

Donc $Df =]0, e]$.

2) f est dérivable si $1 - \ln x > 0$

Donc dérivable sur $]0, e[$.

$$f'(x) = \frac{(1-\ln x)'}{2\sqrt{1-\ln x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$f''(x) = \frac{\left(2x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{4x^2(1-\ln x)} = \frac{\left(x\sqrt{1-\ln x}\right)'}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{\sqrt{1-\ln x} + x\times\left(\frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}\right)}{2x^2(1-\ln x)}.$$

$$= \frac{2(1-\ln x)-1}{4x^2(1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}}.$$

$$= \frac{-2\ln x - 1}{4x^2\left(\sqrt{1-\ln x}\right)^2}$$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}}$, $x \in]0, e[$.

T.V

X	0	e
f'(x)	|	−
f(x)	| + ∞ ↘	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1-\ln x} = +\infty$

4) f est continue et strictement décroissante sur $]0, e]$ donc f réalise une bijection de $]0, e]$ sur $f(]0, e]) = [0, +\infty[$.

5)*/ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Qarray.tn - Agra Elech Qarray.tn